Je viens de terminer votre livre sur Gödel (Les Belles Lettres). En moins de 200 pages, ce n'est pas mal. C'est du condensé enrichissant, aux antipodes des épaisseurs indigestes de certains bavards très appréciés pour leurs foisonnements superflus, dont on tire à peine une goutte de savoir. Après la lecture de votre livre, j'en ai rempli au moins une fiole. Donc, merci. Depuis longtemps, je suis en quête de raccourcis dans différents domaines : vous m'en avez offert un pour avoir une bonne vue d'ensemble sur le travail de Gödel, une vue d'ensemble qui me semble en même temps assez détaillée.

J'ai un peu calé pour comprendre les fonctions récursives primitives (j'avoue par là l'indigence intellectuelle que je traîne depuis de longues années : celle de ne pas être mathématicien). Ce n'est évidemment pas les fonctions récursives elles-mêmes qui me posent problème, puisque je suis exercé à en manipuler et à en développer de toutes sortes depuis des lustres, mais le formalisme particulier qui est utilisé par Gödel pour les décrire dans le cadre restreint de l'arithmétique. Les formalismes sont nécessaires et même incontournables, mais ils sont les barbelés qui délimitent certains domaines du savoir. Il y a des avantages et des inconvénients à cela ; parmi les premiers, je dirais cyniquement que cela permet d'éviter qu'ils ne deviennent trop encombrés ; ce que j'apprécie, même si j'en suis moi-même victime. En effet, je préfère devoir me contenter de contempler un parc merveilleux de loin parce qu'il n'est ouvert qu'au seul seigneur auquel il appartient, que de pouvoir m'y promener au milieu d'un pullulement d'imbéciles.

Votre note en bas de page sur les deux schémas de fonctions récursives primitives m'a fait craindre une rencontre inopinée avec les barbelés, mais j'ai trouvé plus de détails dans le chapitre correspondant de *Histoires d'algorithmes* (Belin). On ne peut pas tout trouver dans un seul livre, parait-il… C'est en partie pour cela que j'en ai beaucoup (tout est relatif), et que de certains je n'ai lu que des bribes.

Je n'ai pas la prétention de discuter du contenu de votre livre maintenant. Je voudrais seulement obtenir quelques précisions. De plus, vous poser des questions fixera au moins mes idées, avant que la lecture d'autres livres ne finisse par les diluer. Bien souvent, un livre chasse l'autre (j'apprécie particulièrement l'aphorisme de Valéry : ce qui est difficile, ce n'est pas de lire des livres, c'est de se les *ajouter*). Voici donc 8 questions sur l'infini :

1) Vous écrivez que la proposition I indécidable est *ad hoc* et ne signifie rien pour le mathématicien. Cela me semble évident, mais par contre, j'aimerais avoir au moins une vague idée de la manière dont les autres propositions indécidables sur l'arithmétique que l'on a été en mesure de lui substituer par la suite dénotent le même caractère circulaire, et autoréférentiel. En effet, cette proposition devrait être double, en affirmant d'abord quelque chose sur les entiers, puis sur elle-même, le fait qu'elle est indémontrable. Dans l'hypothèse où, dans ce contexte, il n’existe pas de proposition dont le caractère autoréférentiel découle d’une affirmation sur autre chose qu’elle-même (les entiers), il faut lui ajouter « et je ne suis pas démontrable », ce qui nous ramène circulairement (mais dans un autre sens) à ce caractère *ad hoc* que vous avez fort justement relevé.

2) J’ai bien compris que le rôle que vous vous assignez dans ce livre n’est pas d’exposer vos propres hypothèses mais celles, souvent contradictoires, de Gödel, cependant il semble, tellement vous « collez » à ces dernières, que vous partagez le point de vue selon lequel il y aurait une différence qualitative, irréductible, entre le fonctionnement d’une machine et celui de l’esprit humain (et/ou mathématicien). S’il me semble qu’il puisse y avoir une différence, celle-ci n’est pas de fonctionnement. Je dirais même que cette différence pourrait se transplanter dans une machine, ou y jaillir comme une étincelle aléatoire à la faveur d’une complexité et d’un niveau de réflexivité suffisants, sans que le fonctionnement de l’esprit de la machine en soit modifié d’aucune manière : cette « étincelle » n’y serait visible que par elle-même, et quand j’écris « elle-même », je ne sais si je dois désigner la machine, « l’étincelle » de réflexivité « métaphysique » qui y jaillirait, ou quelque chose qui se situerait à l’intersection des deux. J’utilise le terme de « réflexivité » dans un sens qui transcenderait la réflexivité propre à la conscience, dans la mesure où celle-ci me semble, même si elle l’est encore très mal dans les détails, « expliquée » (je pense au livre embrouillé, confus et mal écrit de Dennett, mais dont l’idée de base me parait juste).

Cette nuance importante (c’est le moins que l’on puisse dire) n’est cependant pas ce qui nous intéresse lorsque nous tentons de différencier le fonctionnement de la machine de celui de l’esprit humain (cette dernière formulation elle-même fixe l’a priori qu’il s’agirait de dépasser : j’écris donc plutôt « le fonctionnement de l’*esprit* de la machine de celui de l’esprit humain »).

Comme ce livre ne figure pas dans votre pourtant riche bibliographie, je ne saurais trop vous recommander la lecture de *Thinking Computers & Virtual Persons*, Essays on the Intentionality of Machines, et particulièrement celle du chapitre de Eric Dietrich, *Computalionalism*. Comme il me semble me souvenir que les fonctionnalistes l’écrivent eux-mêmes quelque part dans ce livre : il faut commencer par supprimer toutes ces différences virtuelles (au sens d’illusoires) afin d’avoir quelque chance de pouvoir cerner un jour une différence réelle (*réelle* étant à prendre dans le sens le moins concret possible, mais ce n’est qu’un point de vue personnel). Certains fonctionnalistes seraient donc assez malins pour accepter d’envisager qu’ils ne font qu’élaborer une longue preuve par l’absurde de l’irréductibilité de l’esprit humain à celui d’une machine, alors que leurs adversaires restent campés sur leurs a priori romantiques.

Intentionality is Phlogiston est également un chapitre important. Ce n'est ici guère plus qu'une analogie, mais dans *L'Enigme de la Vie* (Odile Jacob), A.G. Cairns-Smith se sert également de la notion de phlogistique pour caricaturer celle de « l'évolution chimique », on ne peut plus *ad hoc* pour établir une forme de continuité en dépit des chaînons manquants entre la matière dite « inerte » et le vivant. Je pense que la croyance de Gödel en cette qualité extensionnelle et réflexive qui serait le propre de l'esprit mathématicien et dont serait à jamais privé celui de la machine, ne fonde guère qu'une différence d'ordre *phlogistique* entre deux formes d'implémentation de l'esprit. Au risque de vous paraître hâbleur, je dirais que *je vous écris demain un programme qui s'arrête de tourner en rond à cause d'une indécidabilité gödelienne, et « décide » quelque chose en fonction de cette expérience*. Ce processus de décision ne me paraît pas fondamentalement différent de l'élaboration, par le mathématicien, d'une métathéorie permettant l'intégration de l'indécidabilité d'un aspect de la théorie initiale dans un processus d'évolution mathématiquement fécond.

Ce qui manque encore à la machine, ce sont les gradations fines des états intermédiaires. En somme, ce qui limiterait la machine, ne serait autre que la relative netteté de son fonctionnement, le caractère trop discrétisable de ses processus et de leurs articulations symboliques, ce que tentent de dépasser les approches connexionnistes. Pour en revenir au cercle vicieux, je dirais qu'il n'y en a peut-être pas encore assez dans la machine pour qu'elle puisse rivaliser avec l'esprit humain.

Tout ceci reste très général et je ne pense pas vous apprendre quoi que ce soit sur le sujet. Voici donc enfin ma question (qui en comporte en fait plusieurs) : justifiez-vous vraiment cette différence qualitative entre l'esprit humain et celui de la machine, et que semble étayer le modèle de Turing ? Turing lui-même croyait-il vraiment en cette différence en faveur de l'esprit humain ? L'oracle auquel serait couplée la machine ne fait-il pas que déplacer le problème, réunissant en une seule la double difficulté de décrire l'esprit humain comme une machine et de compléter les mécanismes d'une machine avec ceux qui caractériseraient l'esprit humain ? Cette notion d'oracle me paraît d'ailleurs tellement grotesque qu'il m'est difficile d'imaginer qu'elle puisse provenir d'un esprit aussi brillant que celui d'Alan Turing.

Dans votre livre, la question semble rester ouverte. Vous ne prenez pas position, ni ne semblez marquer une inclination. En effet, la métaphore de la nouvelle *Les ruines circulaires* met en jeu un homme qui imagine un autre homme, dont le premier s'aperçoit qu'il imagine un autre homme, mais, par ce processus de reproduction concentrique, évoque la régularité d'un mécanisme, et donc une machine, autant qu'un homme. Il y a longtemps que j'ai lu cette nouvelle, bien longtemps. Je vais la relire. Ce n'est certainement pas un hasard si des ruines en constituent le cadre. Au-delà de l'attirance de l'auteur pour les ruines du fait de leur représentativité de cette antiquité génératrice de mythes qui l'inspirent, il y a dans ce processus de construction de *l'autre ego* la déconstruction, la *ruine* de l'ego dans sa prétendue centralité cartésienne. Les ruines concentriques représentent l'architecture du tourbillon, qui se construit sur sa destruction, mais ceci est un autre chapitre… Qu'est-ce qui vous permettrait de croire qu'une machine ne puisse pas dire « spontanément » par exemple: « j'ai trois frères et sœurs : machin, machine, et moi » ?

3) Vous assimilez quelque part l'axiome de réductibilité de Russell à cette vision émanant de l'optimisme rationaliste de Gödel, selon laquelle l'esprit mathématicien dépasse les limites d'un fonctionnement machinal de l'esprit en normalisant, dans un système d'ordre supérieur, les contradictions et les indécidabilités découvertes dans un système d'ordre inférieur. La direction des deux mouvements est ici inverse puisque Russell « réduit » là où Gödel « étend », le système dans un processus de dépassement des contradictions. Que Gödel croie que la machine ne soit pas capable de suivre ce processus de dépassement, en déterminant elle-même ses propres indécidables, n'est pas la question. Celle-ci est que, là où Gödel spécifie le « moteur » de ce processus sous la forme de contradictions, et finalement d'indécidables, Russell ne semble rien spécifier pour expliquer le processus inverse : « toutes les qualités requises pour être un bon général », y compris cette qualité diagonalisable de les posséder toutes et celle-là même, est réintroduite dans une de ces qualités. Russell justifie-t-il cette entorse autrement que par la nécessité de réintroduire l'imprédicativité pour pallier à l'insuffisance de la théorie des types et des ordres par rapport aux mathématiques classiques ?

4) La diagonale de Cantor est bien entendu une chose qui me fascine depuis quelques années mais que je suspecte au même point de reposer sur une forme de liberté arbitraire dont je m'étonne que les mathématiciens aient acceptés de la prendre si facilement alors qu'ils sont si réticents devant celle que suppose l'axiome du choix.

La suite des entiers est ordonnée. Toutes la « logique » des entiers repose sur la notion de successeur, de telle sorte que la notion d'entier n'a aucun sens si ce n'est en tant que successeur d'un autre, dans un ordre parfaitement déterminé. Je dirais donc que cette relation d'ordre est *immanente* au domaine des entiers. Pourtant, pour «provoquer » le paradoxe de la diagonale, on associe un nombre réel quelconque à un entier qui représente la valeur de l'indice dans une liste ordonnée. On met donc arbitrairement en rapport des nombres entiers ordonnés avec des nombres réels qui se présentent dans le désordre. Ma question est donc la suivante : le problème du dénombrable ne relève-t-il pas uniquement de cette dissymétrie, introduite arbitrairement dans le procédé de construction de la diagonale ? Je me permets peut-être ici d'être exagérément affirmatif, mais (Hilbert n'aurait-il été d'accord avec moi ?) toutes les mathématiques reposent sur des axiomes, et les axiomes (s'auto-)reposent sur un principe de symétrie qui leur est immanent. Il ne s'agit pas de mettre en évidence une quelconque symétrie mystique, mais seulement un principe de différenciation du même absolument minimal, au point de se ramener à une tautologie.

Ce n'est peut-être qu'une analogie géométrique, mais toutes les discussions autour de l'axiome des parallèles ne se réduiraient-elles pas à une contestation de cette évidence ? Il est difficile de tracer figures plus incontestablement symétriques que des parallèles. Il faut bien introduire une différence (la plus neutre possible étant ici celle de l'espace) pour distinguer deux figures identiques l'une de l'autre, donc la même figure d'elle-même. Si l'on conteste cela, on conteste 1+1 = 2, ou succ(0) = 1. Les vues russelliennes sur la courbure de l'espace relativiste qui devrait s'imprimer sur le plan géométrique euclidien ne changent rien à cette « évidence ». Mais ceci n'était qu'une digression.

Si les réels étaient ordonnés de même que les entiers-indices du plus petit au plus grand, il ne nous serait possible d'atteindre le dernier (plus petit) nombre du premier nombre réel (un 0 ou un 1 que le système soit décimal ou binaire) pour le transformer en un 1 ou en un 0, qu'au terme de l'infini. Le premier réel différent d'une suite infinie de 0, est une suite, de longueur égale à l'infini – 1, de 0, suivis d'un 1. Pour ne pas retomber sans fin sur le nombre constitué d'une suite infinie de 0, et pour rester conforme à la « méthode » de substitution décrite, je transforme le premier 0 du premier réel différent d'une suite infinie de 0 en un 1.

Mon hypothèse est que la diagonale est à la fin de la liste des nombres réels, et ce, quelque soit le procédé de construction de la diagonale. Si cela ne nous apparaît pas, ce serait uniquement dans la mesure où les réels sont disposés dans la liste, et donc associés chacun à un nombre entier-indice de la liste, <u>*strictement, rigoureusement dans le désordre*</u>. La diagonale de Cantor repose donc sur une autre impossibilité : une construction rigoureuse du désordre. C'est à ce niveau là que réside la contradiction. Ce n'est pas la diagonale qui met en évidence une contradiction (par laquelle on prétend démontrer que les réels ne sont pas dénombrables), c'est la diagonale qui repose sur une contradiction. La diagonale ne fait que mettre en évidence sa propre contradiction (ou du moins celle de sa méthode de construction). Autrement dit, la diagonale ne fait pas ressortir un cercle vicieux, c'est elle-même qui est circulaire.

La méthode de la diagonale, utilisée pour réfuter le caractère dénombrable des réels, pourrait bien être retournée pour prouver le contraire.

Pour tenter de le faire apparaître, je propose d'appliquer le principe d'augmentation qui est à la base de la notion d'infini (je n’écris pas: à la base de l’infini lui-même). Les vecteurs de 0 et de 1 sont rangés en fonction de la valeur qu'ils représentent en notation binaire (le bit de poids le plus fort serait ici à droite, très loin à droite...):

	A	B
	=	=
1)	00000000	10000000
2)	10000000	11000000
3)	01000000	01100000
4)	11000000	11010000
5)	00100000	00101000
6)	10100000	10100100
7)	01100000	01100010
8)	11100000	11100001
9)	00010000	000100001
10)	10010000	1001000001
11)	01010000	01010000001
12)	11010000	110100000001
13)	00110000	0011000000001
14)	10110000	10110000000001
15)	01110000	011100000000001
16)	11110000	1111000000000001
...		

La diagonale de la liste B représente le dernier vecteur qui au terme de l'infini, ne contient que des 1. Cela ne démontre pas que toute méthode de développement de l'infini génère son dernier élément (une affirmation qui serait à la fois banale et surprenante), c'est du moins le cas de celle-ci. On voit aussi que le nombre de vecteurs nécessaire pour avancer d'une position vers la droite augmente exponentiellement et que la diagonale s'en éloigne proportionnellement. Cette espèce d'avance prise par la diagonale est évidemment proportionnelle au nombre d'états que peuvent avoir les éléments du vecteurs (avec le système décimale, le nombre formé par les combinaisons d’états prendrait beaucoup plus de temps encore à rattraper la diagonale).

Bien évidement, on pourra répliquer (exception faite du premier réel si l’on admet que celui-ci puisse n’être constitué que d’une suite infinie de 0) que l’on ne transforme en 1 que les 0 qui sont représentés par les bits (de poids le plus forts – ici à droite) mais qui ne sont encore représentatifs d’aucun nombre (le bit « 0 » en $3^{\text{ème}}$ position ne représente rien par rapport au 3ème réel de la liste ci-dessus, représenté par « 01 »).

A ce problème, je propose une solution qui ne me semble pas trahir l'exigence de symétrie, dans la mesure où elle inverse simplement l'ordre des entiers et celui des réels qui leur sont associés. Je conserve les entiers dans l'ordre dans la mesure où ils représentent le pas incrémental d'une (dé-)construction des réels en partant du « plus grand » d'entre eux (j'essayerai à l'occasion de vous démontrer que vous ne croyez peut-être pas si bien dire en parlant du plus grand arbre de la forêt). Le premier (plus grand) réel de la liste est une suite infinie de 1 :

1)	111111111111...1	011111111111...1
2)	011111111111...1	001111111111...1
3)	101111111111...1	100111111111...1
4)	001111111111...1	001011111111...1
5)	110111111111...1	110101111111...1
6)	010111111111...1	010110111111...1
7)	100111111111...1	100111011111...1
8)	000111111111...1	000111101111...1
9)	111011111111...1	111011110111...1
10)	011011111111...1	011011111011...1
11)	101011111111...1	101011111101...1
12)	001011111111...1	001011111110...1
…		
W)	000000000000...0	000000000000...0

La diagonale s'éloigne de plus en plus de la portion du vecteur qui tend vers 0 ; c'est un problème déjà mentionné, mais ici ce sont les bits de poids de plus en plus fort qui sont remplacés. Y verrait-on quand-même un problème analogue à celui d'un manque de convergence ?

(Ne peut-on tenter de démontrer que la diagonale atteint le terme de l'infini en un nombre infini d'étapes, appelons-le N, mais que le premier 0 de la liste initiale n'atteint lui-même cette position qu'après 2^(N-1) + 1 étapes ?)

Rien ne semble interdire de faire partir la diagonale de la droite (du bit de poids le plus fort) vers la gauche (le bit de poids le plus faible). Ou encore, de commencer par remplacer les bits de poids le plus fort, en miroir de l'opération inverse :

1)	2^W	11111111...11111	01111111...11111
2)	2^W-1	11111111...11110	10111111...11110
3)	2^W-2	11111111...11101	11011111...11101
4)	2^W-3	11111111...11100	11101111...11100
5)	2^W-4	11111111...11011	11110111...11011

6)	2^W-5	11111111...11010	11111011...11010
7)	2^W-6	11111111...11001	11111101...11001
8)	2^W-7	11111111...11000	11111110...11000
9)	2^W-8	11111111...10111	11111111...10111
10)	2^W-9	11111111...10110	11111111...10110
11)	2^W-10	11111111...10100	11111111...10100
…			
W)	2^0	00000000...00000	00000000...00000

Pour peu (si j'ose dire…) que l'on admette que la diagonale ne croisera jamais un nombre réel en passant par un bit dont la valeur initiale est 0, cette « astuce » semble nous montrer encore davantage que ce que la diagonale de Cantor est censée nous montrer: tous les nombres réels de la liste vont être modifiés au passage de la diagonale, et comme ils sont triés (et du fait qu'ils sont tous différents), c'est une nouvelle liste infinie de réels, différente de la première, qui va en résulter (même si c'est par un procédé grossier et caricatural).

En effet, lorsque les réels se suivent dans le désordre, le remplacement d'un bit au passage de la diagonale en position j peut transformer le réel j en un réel i (avec j : i + 1 .. 2^N), tel que ce dernier était avant que le bit i de ce même réel ne soit remplacé.

Pour tout réel i dont le bit i est remplacé, il n'existe que N – i réel(s) qui ne diffère(nt) du précédent que par un bit de poids plus fort que i. C'est donc (la formulation est presque tautologique) ce bit différent et de poids plus fort que i qu'il faudrait remplacer pour retrouver le réel précédent. Il faut ensuite appliquer ce raisonnement à ces N – i réel(s) et poursuivre par récurrence. Je ne peux en donner une démonstration précise ici, mais le nombre de permutations ne sera jamais suffisant pour restaurer la liste.

Elle ne peut être ni incomplète (tous ces N – i réels, doivent être restaurés par une substitution ultérieure) ni redondante (tout réel auquel un autre équivaut suite à une substitution doit lui-même faire l'objet d'une substitution ultérieure).

Le réel qui n'entre dans aucune de ces deux catégories ne peut être qu'un nouveau réel.

Ceci donne lieu à au moins deux autres « paradoxes » de l'infini :

P1 :

Tout réel x modifié par la diagonale doit générer un doublon (x,y). Sinon, cela signifierait que la liste n'est pas complète. Pour supprimer ce doublon, y doit être modifié lui-même par la suite. Le « dernier » réel modifié par la diagonale ne peut générer de doublon, car l'autre réel auquel il est devenu identique devrait se situer encore après lui. Ce problème peut-il être résolu en posant qu'il n'y pas de dernier réel de la liste ? En ordonnant la liste, nous pouvons pourtant nous le représenter : c'est 2^N-1 (en partant d'un vecteur nul). Admettons qu'on ne sache jamais atteindre ce réel (quelque il soit). Alors la diagonale ne l'atteint pas non plus.

Ou bien la diagonale génère un doublon, ou bien la liste est incomplète. Appelons ce doublon I…

P2 :

Dans un couple de réels (x,y) formant un doublon à la suite d'une substitution d'un bit de x, y doit se trouver plus loin dans la liste que x afin de pouvoir être modifié à son tour au passage de la diagonale.

Une substitution de 1 par un 0 dans x crée un réel plus petit.

Une substitution de 0 par un 1 dans x crée un réel plus grand.

(Dans la liste initiale, il y a autant de 0 que de 1, et cette proportion semble donc préservée par les substitutions).

Dans le premier cas, tous les réels x doivent être suivis d'un réel y plus petit pour former le doublon.

Dans le second, tous les réels x doivent être suivis d'un réel y plus grand pour former le doublon.

Posons (sans le démontrer ici) que les réels dont la diagonale transforme un 1 en 0 représentent la moitié de la liste et que ceux dans lesquels se produit la transformation inverse, représente l'autre moitié. Appelons l'ensemble des premiers E1 et celui des seconds E2. E1 doit être suivi de E1' de même taille et dont tous les éléments sont plus petits que ceux de E1. E2 doit être suivi de E2' de même taille et dont tous les éléments sont plus grands que ceux de E2. Même en admettant que E2 soit égal à E1', comme ce ne peut être le cas de E1 et de E2', nous obtiendrions toujours une liste plus grande que la liste initiale. Il n'est qu'une solution à cela : que toutes substitutions en E1finissent par le transformer en E2, et vice-versa.

* * *

La diagonale pourrait donc générer plus d'un nombre réel ne figurant pas dans la liste initiale : le réel qu'elle représente et ces « nouveaux » réels qui se construisent en même temps qu'elle. Suffit-il de dire que cela n'a aucun sens puisque l'on ne considère le contenu de la liste qu'une fois que la diagonale a été construite ?

Cette diagonale elle-même tend donc à nous montrer plus que ce qu'elle est sensée nous montrer. Au lieu de me démontrer ce qu'elle est sensée nous montrer, ce « surplus » me le rend d'autant plus douteux.

A
=

1)	000	1)	100
2)	100		
3)	010	1.1)	0(1)0
4)	110		

5) 001 1.2) 00(1)
6) 101
7) 011
8) 111
...

Bref, là où la diagonale de Cantor génère des permutations dans la liste, la diagonal, égale au plus grand (ou au plus petit) réel, que nous avons construite, génère une nouvelle liste.

C'est fort beau, mais si nous pouvons démontrer que la diagonale de zéros atteint le terme de l'infini en N étapes (N = l'infini) et que le dernier vecteur nul n'est lui-même constitué qu'après 2^N étapes, cela aussi tomberait à l'eau, car cela signifierait que 2^N – N vecteurs demeureraient inchangés (hors de portée de la diagonale).

Cette diagonale doit-elle vraiment être une diagonale et atteindre le dernier bit du dernier vecteur en 2^N étapes ?

Ce type de problème nécessitent une métamathématique, pour fixer les règles du jeu mathématique : une des questions les plus simples qui puissent se poser à ce niveau serait « la diagonale de Cantor doit-elle vraiment être une diagonale (atteindre le dernier bit du dernier vecteur en 2^N étapes) ? » Nous sommes tentés de répondre : oui. Nous aurions au moins fixé une des règles du jeu. Cette règle nous semble logique (Vous avez déjà vu une diagonale qui, partant de l'angle supérieur gauche d'un rectangle, atteint un point situé vers le haut du côté opposé ? Admettons que ces considérations n'ont pas de sens dans une « géométrie » de l'infini) mais est-elle applicable ?

On pourrait construire la diagonale de Cantor si et seulement si les réels sont disposés au hasard (ou plutôt : absolument dans le désordre) dans la liste. Mais notre procédé de construction des réels (qu'il soit binaire ou décimale) mettrait en évidence le fait que la liste est beaucoup plus longue que large ; la diagonale, passant de (x,y) en (x+1,y+1), n'atteindrait jamais l'extrémité de cette liste.

Les mathématiciens ont la faculté rare (peut-être pas si rare…) de ne ressentir aucun coup qui ne leur soit asséné avec leurs propres armes ; c'est, entre autres, pourquoi j'ai commandé un livre qui me permettra peut-être de formuler ce raisonnement dans leur propre formalisme, qui est celui de la théorie des ensembles. En attendant, je suppose que le *Cantor* de J-P. Belna dont je viens d'entreprendre la lecture à la suite de celle de votre Gödel, m'aidera à y voir plus clair.

5) Dans l'appendice du chapitre *Gödel dans l'histoire des sciences*, il y a une affirmation d'allure axiomatique que toute la suite du livre ne me semble pas justifier ni éclaircir : « Cependant, un langage au deuxième ordre ne peut être défini qu'au moyen d'une infinité d'axiomes, qu'aucune règle ne permet de reconnaître ». Je me perds ici dans l'infini dénombrable, dans celui de la diagonale, et ne parvient pas à définir exactement cette infinité d'axiomes par rapport aux différentes notions d'infinis explicitées dans la suite du livre. Je ne vois pas en quoi le fait que, dans un langage du deuxième ordre, les quantificateurs s'appliquent non seulement aux individus mais aux relations entre ceux-ci, nécessite *plus* d'axiomes (en l'occurrence une infinité), dans la mesure où il me semble que les relations peuvent être considérées elles-mêmes comme des entités totalement assimilables à des individus. Cette hypothèse, que j'exprime moi-même de façon trop affirmative, qu'elle se vérifie ou non par rapport à ce que vous affirmez quant au langage de deuxième ordre, ne se traduit-elle pas par l'axiome de réductibilité de Russell ? (puisque de même que le type II se ramènerait au type I, les axiomes nécessaires dans le langage du deuxième ordre se ramèneraient à ceux qui le sont dans le langage des prédicats).

Dans *Signification et vérité* (An inquiry into meaning and truth) dont j'ai commencé la lecture, Russell tente de définir ce qu'il appelle un *langage-objet*. Il me semble un peu trop affirmatif lorsqu'il écrit *qu'il est clairement impossible que les débuts de la connaissance d'un être quelconque se marquent par l'intelligence du mot « ou »*. Je suis très tenté de lui donner raison, mais n'ayant qu'une très vague notion de ce que furent les débuts de ma « connaissance » (sinon qu'ils ne doivent pas être fort différents du processus cognitif qui est sensé les prolonger), je ne peux absolument m'en convaincre. En effet, l'alternative *blanc ou noir* peut fort bien faire surgir une notion de gris qui ne serait pas fondamentalement plus abstraite que les perceptions que j'aurais eues au préalable du noir et du blanc. Peu importe que le « ou » soit ici inclusif ou exclusif. « Je suis avec Maman ou je retourne au néant » pourrait bien exprimer une des alternatives (où le « ou » est exclusif) fondatrices du moi, et donc certainement de la connaissance : la conscience se cristallise dans l'intersection de la présence et de l'absence. Le « ou » exclusif se résout pour ainsi dire en un « ou » inclusif. L'aspect psychanalytique n'en serait qu'une illustration.

Le *langage-objet* reflète la prééminence de la perception des objets (ou des individus) sur celle de leurs relations. Cela ne dénote-t-il pas une sorte d'a priori analogue à celui qui serait à la base de cette différence (en termes de nombre d'axiomes nécessaires) entre langage du premier ordre et langage du deuxième ordre ?

6) Comment pouvez-vous affirmer qu'il existe des concepts qui ne s'appliquent pas eux-mêmes ? Comment pouvez-vous affirmer que le concept de *vert* n'est pas vert ? Bien sûr, si vous pouvez démontrer ce fait, autrement que par le fait que le concept de *ver de terre* n'est pas un ver de terre, il est facile d'inférer que la majorité des concepts sont hétérologiques. Cela me heurte autant que vous de devoir reconnaître que le concept de *vert* est indissociable de cette couleur elle-même. Si vous faites abstraction, dans votre concept de *vert*, de tous les concepts corollaires, qui, pour ainsi dire, parasitent celui de la couleur verte telle que vous la percevez, éventuellement comme la synthèse virtuelle de toutes les nuances de vert que vous avez effectivement perçues, que reste-t-il d'autre que le *vert* ? Il est évident que l'esprit ne peut concevoir le vert sans que cette notion se soutienne d'une quantité invraisemblable de notions « parasites » dont elle représente en quelque sorte *la moyenne virtuelle*. Comme pour la plupart des moyennes, il n'existe aucune instance dans le réel ou même dans l'imaginaire, qui puisse la représenter exactement. Vous en arriveriez à un tel dépouillement du concept de vert que celui-ci, s'identifiant virtuellement à son objet, s'appliquerait à lui-même. Vous pouvez vous poser la même question par rapport au concept du nombre deux, par exemple. Il est un fait que mon idée de mon idée du vert ne se ramène pas au vert, mais je pense que ce que l'on entend généralement par l'idée du vert, si on y soustrait l'idée de cette idée du vert, se ramène au *vert*.

Le concept de réciprocité semble faire partie des irréductibles, car s'il peut, par le même travail de dépouillement cognitif, se ramener à la représentation minimale d'une réciprocité, autrement dit, à une *réciprocité*, il n'est pas pour autant réciproque. Cependant, il l'est peut-être, non pas en vertu de lui-même, d'une propriété de réciprocité qui lui serait inhérente, mais parce que cette propriété est présente dans tous les concepts. Il ne me semble pas exclu qu'après un examen plus approfondi, tous les concepts reconnus comme hétérologiques ne le soient finalement pas, non pas parce qu'ils se réduisent aux propriétés particulières qu'ils représentent respectivement, mais parce que, en dernière instance, tous les concepts possèdent toutes les propriétés de cette classe de propriétés qui les font paraître individuellement hétérologiques. Le concept de vert n'étant pas hétérologique si on le considère dans sa singularité, le *vert* ne fait pas partie de cette classe de propriétés commune à tous les concepts. En vérité, ce raisonnement bizarre, serait plutôt une tentative de démonstration par l'absurde de l'homologie de tous les concepts, car si nous devons finalement reconnaître comme absurde le fait que le concept de droite est une droite parce que celui de courbe possède la propriété d'une droite et vice versa (mon exemple est peut-être mal choisi du fait de l'identité, dans certaines géométries, de la courbe et de la droite), on ne voit pas ce que le concept de courbe peut être d'autre qu'une courbe et… un concept.

Le raisonnement précédent relève sans doute davantage de la rhétorique que de la logique, mais Il m'est plus facile d'admettre que tous les concepts s'appliquent à eux-mêmes que le fait que tous les ensembles se contiennent eux-mêmes (le fait que tous les ensembles se contiendraient eux-mêmes serait une solution « violente » au paradoxe de Russell). Il me semble que la différence fondamentale entre ensemble et concept tient précisément en ceci que les ensembles, en tant qu'objets conceptualisables, et donc non réductibles au concept (de la même façon, très grossièrement, que le vert ne semble pas réductible au concept de vert, ou le nombre deux à son concept, bien que cela aussi soit éminemment discutable…, et à mon avis, même faux), les ensembles, donc, si vous me permettez cette expression, *explosent* le concept. C'est une façon certes fort imagée d'exprimer la différence entre intentionnel et extensionnel, mais cette « extension » s'opère à l'intérieur du concept. Pour résumer, le concept d'un ensemble quelconque, même paradoxal, se ramène ultimement à cet ensemble, de même que le concept de vert se ramène au vert, mais si le vert se ramène lui-même au concept de vert, et si le nombre deux (par exemple) vérifie également cette réciprocité, les ensembles ne la vérifient pas. C'est par là (et peut-être par là seulement) que je tendrais à rejoindre Gödel dans sa croyance en la réalité (en un sens indépendante de la notion - ou du concept - que l'on en a) des objets mathématiques. La question, bien sûr, reste entièrement ouverte. A propos d'ouverture, je discerne même des intervalles béants dans l'enchaînement logique de tout ce que je viens d'écrire (ce qui signifierait que la question elle-même est mal formulée), je vais donc encore tenter de remplir un de ces intervalles:

Si le concept de vert ne se ramène pas au vert, il contient un cercle vicieux. Le concept de quelque chose ne se ramène-t-il pas alors à une formulation telle que : « ce *quelque chose* et je suis un concept » ou « je suis le concept de (ce) *quelque chose* ». Si « je suis le concept de *quelque chose* » est la formulation minimale du concept de quelque chose, se ramenant finalement à « *quelque chose* » pour quelque chose, la première partie « je suis un concept » ou simplement les guillemets encadrant la seconde partie, est commune à tous les concepts sur n'importe quoi d'autre que ce quelque chose. Le concept de quelque chose présuppose donc l'ensemble de tous les concepts. Si le concept n'était pas réductible à ce quelque chose auquel il se rapporte, ce ne serait que du fait qu'il contient une référence à l'ensemble des concepts (et il n'y aurait plus lieu de distinguer entre paradoxe intensionnel et paradoxe extensionnel).

Je ne pense pas inopportun de le répéter : tout ce qui est qui formulé dans cette « question » me semble à moi-même particulièrement embrouillé et bizarre, et elle reste entièrement ouverte. N'y a-t-il pas quelques lumières à rechercher du côté de Hegel (l'antinomie du concept) et/ou de Husserl ? Nous distinguons donc bien ici entre concept logique et concept d'un point de vue phénoménologique : le concept de clarté, par exemple, ne peut se concevoir que par rapport à la propriété inverse, qui est celle d'obscurité, mais cela ne me semble vrai que d'un point de vue phénoménologique ; il ne peut se concevoir qu'en fonction d'un contraste, là où d'autres, plus abstraits, mais toujours considérés d'un point de vue phénoménologique, relèveraient d'une antinomie. Le concept logique est du même type qu'une proposition, à cette différence qu'une proposition affirme quelque chose sur quelque chose d'autre (qui peut se ramener à elle-même). Le concept logique peut être celui d'une telle proposition, mais sans affirmer quoi que ce soit d'autre sur elle.

7) Il est peut-être dommage que cette question vraiment très subjective figure en pénultième position dans ma liste de questions, mais celles-ci ne sont pas triées en fonction de leur importance. Ne trouvez-vous pas antipathique un personnage qui ose affirmer : « *Jamais le mathématicien ne sera réduit à dire* Ignorabimus » ? Selon moi, c'est plutôt une question digne d'un ingénieur que d'un mathématicien. Pour moi, c'est presque une joie de voir une trappe s'ouvrir sous les pieds de l'individu qui, si génial soit-il par ailleurs, ose proférer de telles affirmations. J'imagine que pas mal de vieux singes ont dû se lever dans l'assemblée pour applaudir en réponse à ce cri de ralliement. Je vois leur menton, porté en avant par un fier mouvement d'assentiment collectif, retrouver quelque chose de son prognathisme originel, prolongé par la barbiche comme par un retour à une pilosité simiesque.

8) L'infini n'en dit-il pas plus long sur les mathématiciens que ceux-ci n'en disent sur lui ?

Ne se justifiant pour moi que dans le mesure où ce qui précède a suscité votre intérêt, les présentations viennent à la fin. Comme dans toute boutade, il y a une vérité, si je devais me présenter par une boutade, ce serait en référence à l'article de J-P. Delahaye, paru dans Pour la Science : *Les programmeurs écrivains*. Je manque donc de repères formels aussi bien en mathématiques qu'en philosophie ; cette relative naïveté me permet encore d'être frappé par certains paradoxes, et d'être incité à rêver longtemps à leurs propos. Ce fut le cas, lorsque je fus « frappé », comme par la foudre, il y a plus de dix ans par celui de Russell : « l'ensemble des ensembles ne se contenant pas eux-mêmes se contient-il lui-même ?» Ce paradoxe est le véritable point de départ d'une polarisation de mes idées sur le plan logique et mathématique, que je cherche à préciser depuis par la lecture de livres tels que le vôtre. Le théorème de Gödel, par contre, ne m'avait jamais beaucoup inspiré (on en parlait d'ailleurs trop à mon goût pour que cela me botte) ; en articulant ce théorème de façon plus précise, et surtout, me semble-t-il, plus intelligente, que dans bien d'autres livres ou articles, à des problèmes comme celui de la diagonale, et finalement à tout ce qui se délimite plus ou moins par la notion de « crise des fondements », incluant bien entendu le paradoxe ensembliste de Russell, vous avez suscité véritablement mon intérêt pour le travail de Gödel. On peut faire l'hypothèse que chacun est plus ou moins enclin à être plus particulièrement frappé par certains paradoxes, ou antinomies, ou indécidabilités, que par d'autres et ce en dépit des relations étroites qui semblent quelquefois permettre de les assimiler les uns au autres. Moi, c'est le paradoxe de Russell, exactement comme je l'ai formulé plus haut. Même le paradoxe du menteur, tel qu'on me l'a servi et assaisonné de diverses manières par le passé, ne m'a jamais beaucoup impressionné. Le paradoxe de Russell est le point de départ de ma réflexion : c'est par ce tourbillon là que j'ai été happé.

Je me permettrai peut-être de forwarder cette lettre à Gilles Dowek (je me permets d'exhiber à un auteur un texte que j'ai adressé moi-même à un autre, mais jamais un texte qu'un auteur m'aurait adressé, du moins sans avoir obtenu son accord). Il y a des années (en 2001 pour être précis), je lui avais envoyé un mail dans lequel j'esquissais déjà mon objection au raisonnement de la diagonale, tel qu'il l'exposait dans un livre, *Quand la Science à dit… c'est Impossible*, aux éditions du Pommier. Il m'avait répondu que, comme je l'avais bien vu, ce réel construit par la diagonale existait dans la liste, mais qu'en même temps, il n'existait pas, et que ceci n'est pas une contradiction à proprement parler mais seulement une contradiction *sous hypothèse* (permettant de montrer que l'hypothèse de l'existence d'une liste est fausse et donc que R n'est pas dénombrable). C'est une remarque sympathique et intelligente, mais n'est-elle elle-même quelque peu circulaire, dans la mesure où elle ne fait que reformuler ce qui m'était apparu justement comme une énigme ? Je ne sais si mes raisonnements représentent eux-mêmes le moindre progrès vers son élucidation. Gilles Dowek a sans doute voulu me signifier qu'il n'y a pas lieu de l'élucider, puisqu'on est au moins sûr qu'elle relève d'une indécidabilité.

~~Mon idée…~~

~~Je l'ai un peu précisée suite à la lecture de votre livre, mais c'est au fond toujours la même idée. Vu le nombre d'années depuis lequel elle se maintient dans mon esprit sans beaucoup bouger (un peu comme ces araignées qui surprennent par une longue immobilité, qui ne tissent même pas une toile, puis qui, tout à coup,~~ ~~*filent*~~ ~~sous une impulsion quelconque), elle n'appartient peut-être qu'au domaine des~~ ~~*idées fixes*~~~~. Nous en reparlerons peut-être lorsque j'aurai tenté de la formaliser.~~